ÉNONCÉ

E hilbert. C partie convexe fermée $\neq \emptyset$ de $\mathcal{H}$.

1. $\forall x \in E$, $\exists!\, y \in C$, $\|x-y\| = d(x, C)$.

Ce pt est appelé projection de x sur C noté $p_C(x)$.

2. $y = p_C(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ y \in C \\ \cdot\ \forall z \in C,\ \mathrm{Re}(\langle x-y, z-y \rangle) \leq 0 \end{cases}$

3. si F ss ev fermé de E, $\forall x \in E$, $\exists!$ projeté $p_F(x)$.

De plus : $y = p_F(x) \Leftrightarrow \forall z \in F$, $\langle x - y, z \rangle = 0$.

LEÇONS.

205

208

213

219

253

RÉFS.

[G] Gourdon - analyse p. 408

RÉSULTATS ASSOCIÉS

DÉMO

■ : à l'oral.
■ écrit au tableau.
■ : pour Comprendre.

1.

E hilbert. $x \in E$.

C convexe, fermé, non vide.

① EXISTENCE.

C non vide.

$$d := d(x, C) = \inf_{c \in C} d(x,c) < +\infty$$

Par caract borne inf, $\exists$ suite minimisante. → on prend le carré car + simple calcul $\|\cdot\|$.

$$\exists (y_n) \in C^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad d^2 \leq \|x - y_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n} \quad \leftarrow (*).$$

On va mq (y_n) converge vers 1 lim qui sera la val qui minimise dist donc projeté.

On est ds un complet :

Mq (y_n) de Cauchy :

Soit $m \geq n \in \mathbb{N}^*$.

Par l'identité du parallélogramme,

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\underbrace{\Big\|x - \underbrace{\frac{y_m + y_n}{2}}_{\in C \text{ car } C \text{ convexe.}}\Big\|^2}_{\geq d^2}$$

$$\text{Donc } \|y_m - y_n\|^2 \leq 2\left(d^2 + \frac{1}{m} + d^2 + \frac{1}{n}\right) - 4d^2$$

$$\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc (y_n) de Cauchy dans E complet : $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y \in C$ car C fermé.

De plus, par continuité de $\|\cdot\|$, $d \overset{(*)}{=} \lim_{n \to +\infty} \|x - y_n\| = \|x - y\|$

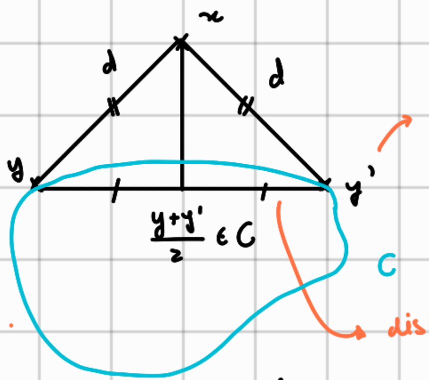
② UNICITÉ.

Si $y, y' \in C$ à même distance de x d

$\frac{y+y'}{2} \in C$ est à dist $< d$.

donc la seule pb pr que y et y' 2 projetés c'est $=$.

Pour la démo, on réapplique juste :



segment $\subset$ C

distance est $<$ à d

Par identité //ogramme, si y, y' vérifient $\|y - x\| = \|y' - x\| = d$, $y = y'$.

$$\|y - y'\|^2 = 2\underbrace{\|x - y\|^2}_{= d^2} + 2\underbrace{\|x - y'\|^2}_{= d^2} - 4\Big\|x - \underbrace{\frac{y+y'}{2}}_{\in C}\Big\|^2$$

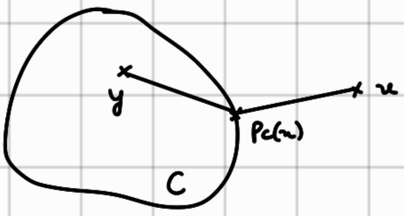
$$\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

③ CARACTÉRISATION :

on veut mq $\forall y \in C$

l'angle formé ici

est obtus.



on le voit bien en dim = 2, de manière générale, cela revient à :

BUT : $y = p_C(x) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0 \quad \forall z \in C.$

$\Rightarrow$ $\forall z \in C$, $\forall t \in]0,1[$, $zt + (1-t)y = y + t(z-y) \in C$ (car convexe).

et $\|x-y\|^2 \leq \| x - y - t(z-y)\|^2$

$= p_C(x)$ $\leq \|x-y\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(t\langle x-y, z-y\rangle) + t^2\|z-y\|^2$

Donc $\mathrm{Re}\,(\langle x-y, z-y\rangle) \leq \frac{t}{2}\|z-y\|^2 \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$

Donc pr t suffisement petit ≤ 0

$\Leftarrow$. $\forall z \in C$,

$\|x-z\|^2 = \|x-y-(z-y)\|^2$

$= \|x-y\|^2 \underbrace{-2\mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle)}_{\geq 0 \text{ par hyp.}} + \underbrace{\|z-y\|^2}_{\geq 0}$

$\geq \|x-y\|^2$

Donc $y = p_C(x)$. par déf

④ Soit F ss ev fermé de E.

$p_F(x)$ est bien déf (ss ev = convexe, non vide)

BUT : $y = p_F(x) \Leftrightarrow$ $x-y \in F^\perp$ ie $\langle x-y, z\rangle = 0 \quad \forall z \in F$

$\Rightarrow$

Soit $y \in F$.

si $y = 0$, $\langle x - p_F(x), y\rangle = 0$

sinon, opsq $\|y\| = 1$ (quitte à normaliser).

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $p_F(x) + \lambda y \in F$ (ss ev) donc

introd param pr marge de manoeuvre.

$\|x - p_F(x)\|^2 \leq \| x - (p_F(x) + \lambda y)\|^2$

$\leq \|x - p_F(x)\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda\langle x - p_F(x), y\rangle) + |\lambda|^2 \underbrace{\|y\|^2}_{=1}$

Pour $\lambda = \langle x - p_F(x), y\rangle$:

$2\,\cancel{\mathrm{Re}}\left(|\langle x - p_F(x), y\rangle|^2\right) \leq |\langle x - p_F(x), y\rangle|^2$

Donc $|\langle x - p_F(x), y\rangle|^2 = 0$.

Donc $\langle x - p_F(x), y\rangle = 0$

$\Leftarrow$ $\forall z \in F$, $z - y \in F$ donc $\mathrm{Re}(\underbrace{\langle x - y, z - y\rangle}_{=0}) \leq 0$

Si RESTE TEMPS :

On a alors, $\forall x \in E$, $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp}$ donc $E = F + F^\perp$

. si $x \in F \cap F^\perp$: $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$.

Donc $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

Et si H ss ev qqconque $E = \overline{H} \overset{\perp}{\oplus} \overline{H}^\perp = \overline{H} \overset{\perp}{\oplus} H^\perp$ donc $\overline{H} = E \iff H^\perp = \{0\}$.